Dualidad en problemas de optimización
Una solución al Problema de Kantorovich

Galicia Pineda Enrique

27/07/2021

El Problema de Kantorovich

El problema KP

Dadas $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $c : X \times Y \to [0, \infty]$ buscamos resolver:

$$inf \left\{ K(\gamma) := \int_{X \times Y} c d\gamma : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}$$

Donde $\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : (\pi_x)_{\#} \gamma = \mu, \ (\pi_y)_{\#} \gamma = \nu \right\}$

El Problema de Kantorovich

El problema KP

Dadas $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $c : X \times Y \to [0, \infty]$ buscamos resolver:

$$inf \left\{ K(\gamma) := \int_{X \times Y} c d\gamma : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}$$

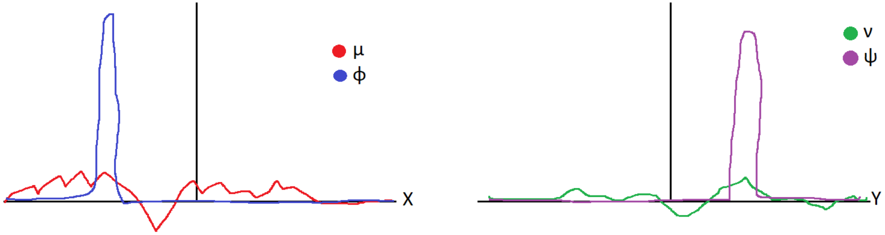
Donde $\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : (\pi_x)_{\#} \gamma = \mu, \; (\pi_y)_{\#} \gamma = \nu \right\}$

Consideremos a $\gamma \in \mathcal{M}_+(X \times Y)$, se tiene entonces que:

$$sup \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \\ \infty & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Donde el supremo es tomado entre las funciones continuas y acotadas ϕ, ψ

El Problema de Kantorovich



El Problema de Kantorovich

La reformulación

$$\inf_{\gamma} \int_{X\times Y} c d\gamma + \sup_{\phi,\psi} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X\times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\gamma$$

El Problema de Kantorovich

La reformulación

$$\inf_{\gamma} \int_{X\times Y} c d\gamma + \sup_{\phi,\psi} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X\times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\gamma$$

$$\sup_{\phi,\psi} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu + \inf_{\gamma\geq 0} \int_{X\times Y} (c(x,y) - \phi(x) - \psi(y)) d\gamma$$

El Problema de Kantorovich

La reformulación

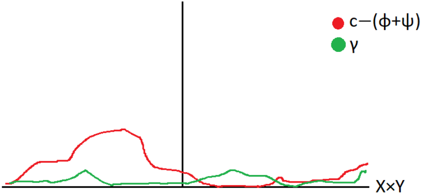
$$\inf_{\gamma} \int_{X\times Y} c d\gamma + \sup_{\phi,\psi} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X\times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\gamma$$

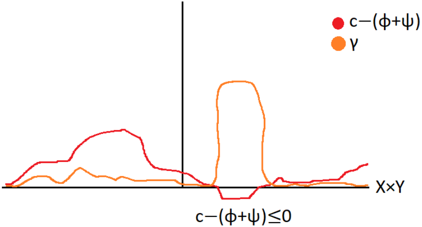
$$\sup_{\phi,\psi} \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu + \inf_{\gamma\geq 0} \int_{X\times Y} (c(x,y) - \phi(x) - \psi(y)) d\gamma$$

Notemos que:

$$\inf_{\gamma\geq 0} \int_{X\times Y} (c(x,y) - \phi(x) - \psi(y)) d\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi(x) + \psi(y) \leq c(x,y) \\ -\infty & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

El Problema de Kantorovich





El Problema de Kantorovich

El Problema Dual (DP)

Dadas $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $c : X \times Y \to [0, \infty]$ buscamos resolver:

$$sup \left\{ \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu : \phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\}$$

Donde $\phi \in \mathcal{C}_b(X)$, $\psi \in \mathcal{C}_b(Y)$

El Problema de Kantorovich

El Problema Dual (DP)

Dadas $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $c : X \times Y \to [0, \infty]$ buscamos resolver:

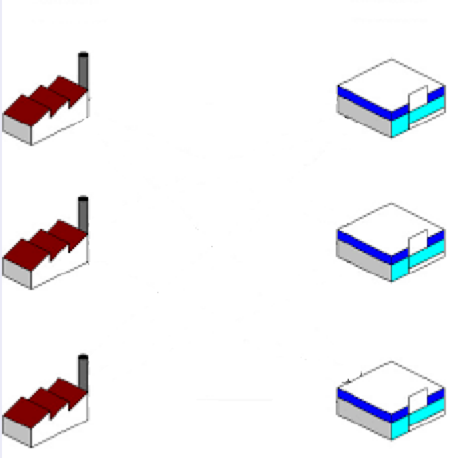
$$sup \left\{ \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu : \phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \right\}$$

Donde $\phi \in \mathcal{C}_b(X)$, $\psi \in \mathcal{C}_b(Y)$

$$sup(DP) \leq inf(KP)$$

El Problema de Kantorovich

El problema del transportista



Funciones c-conjugadas

Definición

Dada una función $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definimos su c-conjugada función $f^c : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ como:

$$f^c(y) = \inf_{x \in X} c(x, y) - f(x)$$

Funciones c-conjugadas

Definición

Dada una función $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definimos su c-conjugada función $f^c : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ como:

$$f^c(y) = \inf_{x \in X} c(x, y) - f(x)$$

Definición

Dada una función $g : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ definimos su $\bar{c}$-conjugada función $g^{\bar{c}} : X \to \bar{\mathbb{R}}$ como:

$$g^{\bar{c}}(x) = \inf_{y \in Y} c(x, y) - g(y)$$

Funciones c-conjugadas

Proposición

Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ familia de funciones que satisfacen la condición:

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| \leq \omega(d(x, x'))$$

Si $f(x) := inf_{\alpha \in I}(f_\alpha(x))$ entonces $f(x)$ también satisface ésta condición con el mismo módulo de continuidad ω

Funciones c-conjugadas

Proposición

Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ familia de funciones que satisfacen la condición:

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(x')| \leq \omega(d(x, x'))$$

Si $f(x) := inf_{\alpha \in I}(f_\alpha(x))$ entonces $f(x)$ también satisface ésta condición con el mismo módulo de continuidad ω

La función de costo

Si c es una función continua y finita y X, Y son compactos, entonces c es una función acotada y uniformemente continua y satisface que $|c(x, y) - c(x', y')| \leq \omega(d(x, x') + d(y, y'))$. Luego, por definición de las funciones c-conjugadas y la proposición anterior, estas comparten el mismo módulo de continuidad

Funciones c-conjugadas

Las funciones c-conjugadas preservan la desigualdad del costo

Si $\phi \in \mathcal{C}_b$:

$$
\begin{aligned}
\phi(x) + \phi^c(y) = \ldots \\
\ldots = &\phi(x) + \underset{x \in X}{inf} \{c(x,y) - \phi(x)\} \leq \phi(x) + c(x,y) - \phi(x) \\
&\leq c(x,y)
\end{aligned}
$$

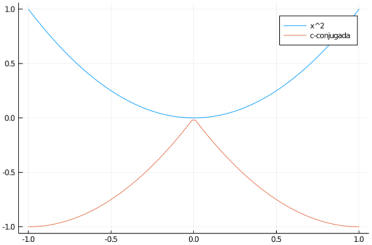
Las funciones c-conjugadas preservan la desigualdad del costo

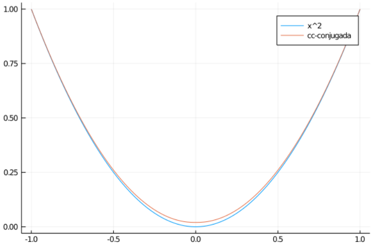
Si $\phi \in \mathcal{C}_b$:

$$
\begin{aligned}
\phi(x) + \phi^c(y) &= \ldots \\
\ldots = &\phi(x) + \inf_{x \in X}\{c(x,y) - \phi(x)\} \leq \phi(x) + c(x,y) - \phi(x) \\
&\leq c(x,y)
\end{aligned}
$$

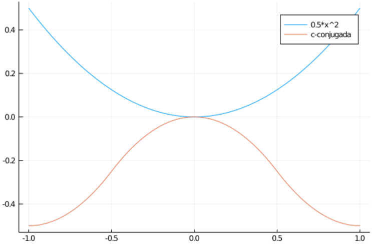
$$
\begin{aligned}
\phi^{c\bar{c}}(x) + \phi^c(y) &= \ldots \\
\ldots &= \inf_{y \in Y}\{c(x,y) - \phi^c(y)\} + \phi^c(y) \leq c(x,y) - \phi^c(y) + \phi^c(y) \\
&\leq c(x,y)
\end{aligned}
$$

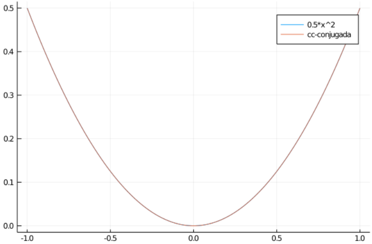
Funciones c-conjugadas



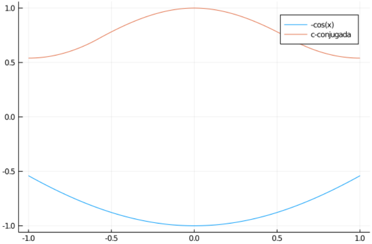


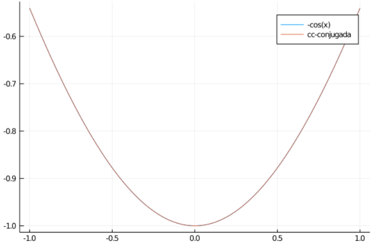
Funciones c-conjugadas





Funciones c-conjugadas





Funciones c-conjugadas

Definición

Decimos que una función $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ es c-cóncava si existe función $g : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\phi = g^{\bar{c}}$. Y denotamos a este conjunto de funciones como $c - conc(X)$

Propiedades

- $\phi^{c\bar{c}} \geq \phi$
- Si ϕ es una función c-cónvaca entonces $\phi^{c\bar{c}} = \phi$
- Las parejas (ϕ, ϕ^c), $(\phi^{c\bar{c}}, \phi^c)$ preservan la desigualdad de costo e incrementa el valor de las integrales

El Problema Dual

Existencia de las soluciones DP

Supongamos que X, Y son compactos y c continua. Entonces existen funciones solución ϕ, ψ a DP y cumplen que $\phi \in c - conc(X)$, $\psi \in \bar{c} - conc(Y)$ y $\psi = \phi^c$.

$$sup(DP) = \sup_{\phi \in c-conc(X)} \int_X \phi d\mu + \int_Y \phi^c d\nu$$

A las funciones ϕ se les conoce como potencial de Kantorovich

El Problema Dual max(DP)=min(KP)

Teorema

Supongamos que X, Y son espacios Polish, y que $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y acotada. Entonces el problema DP admite una solución de la forma ϕ, ϕ^c y tenemos que $max(DP) = min(KP)$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo T

Asumiremos que $X = Y = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y c es una función continua. Esto garantiza que $max(DP) = min(KP)$. Tomemos un plan de transporte óptimo γ y un potencial de Kantorovich ϕ, tenemos que:

$$\int_{\Omega\times\Omega} c d\gamma = \int_{\Omega} \phi d\mu + \int_{\Omega} \phi^c d\nu = \int_{\Omega\times\Omega} (\phi(x) + \phi^c(y)) d\gamma$$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo T

Asumiremos que $X = Y = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y c es una función continua. Esto garantiza que $max(DP) = min(KP)$. Tomemos un plan de transporte óptimo γ y un potencial de Kantorovich ϕ, tenemos que:

$$\int_{\Omega\times\Omega} c d\gamma = \int_{\Omega} \phi d\mu + \int_{\Omega} \phi^c d\nu = \int_{\Omega\times\Omega} (\phi(x) + \phi^c(y)) d\gamma$$

$$\phi(x) + \phi^c(y) = c(x, y) \text{ si } (x, y) \in sop(\gamma)$$

$$sop(\gamma) := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : \gamma(B_r(x, y)) > 0 \ \forall r > 0\}$$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo T

Sea $(x_0, y_0) \in sop(\gamma)$ entonces:

$$\begin{aligned} \phi(x_0) + \phi^c(y_0) &= c(x_0, y_0) \\ -\phi^c(y_0) &= \phi(x_0) - c(x_0, y_0) \\ -\inf_{x\in\Omega} c(x, y_0) - \phi(x) &= \phi(x_0) - c(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Y x_0 es un punto extremo para la función $\phi(x) - c(x, y_0)$, i.e. $\nabla\phi(x_0) = \nabla_x c(x_0, y_0)$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo

The twist condition

Si c es derivable y para cada x_0 el mapeo $y \mapsto \nabla_x c(x_0, y)$ es inyectivo, diremos que c satisface *the twist condition*

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo

The twist condition

Si c es derivable y para cada x_0 el mapeo $y \mapsto \nabla_x c(x_0, y)$ es inyectivo, diremos que c satisface *the twist condition*

Funciones estrictamente convexas

Sea $c(x, y) = h(x - y)$ con h función estrictamente convexa. Si ϕ, h son funciones derivables en x_0 y $(x_0 - y_0)$ y $x_0 \notin \partial\Omega$ sabemos que $\nabla\phi(x_0) = \nabla h(x_0 - y_0)$ de donde obtenemos:

$$y_0 = x_0 - (\nabla h)^{-1} (\nabla\phi(x_0))$$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo

Teorema

Dadas μ, ν medidas de probabilidad sobre un dominio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existe un plan de transporte óptimo γ para el costo $c(x, y) = h(x - y)$ con h estrictamente convexa. Éste es único y de la forma $(Id, T)_{\#}\mu$ previendo que μ es absolutamente continua y $\partial\Omega$ es despreciable. Aún más, existe un potencial de Kantorovich ϕ vinculado a T por:

$$T(x) = x - (\nabla h)^{-1} (\nabla\phi(x))$$

El Problema Dual
La existencia de un mapeo óptimo

Consecuencias

- Todos los costos de la forma $c(x, y) = |x - y|^p$ con $p > 1$ pueden ser tratados.
- El plan de transporte óptimo y el mapeo óptimo son únicos.
- Si las condiciones del teorema se mantiene para ν podemos hablar de la existencia de un mapeo S tal que $\gamma = (S, Id)_{\#}\nu$, $y = T(x)$ y $x = S(y)$ teniendo así que S(T(x))=x casi en todas partes. Es decir T es invertible es conjuntos de medida no cero y su inversa es el mapeo óptimo de ν a μ

El mapeo como gradiente de una función convexa

$$c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$$

$$c(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

$$\Longrightarrow \ [\nabla_x c]_i = x_i - y_i$$

$$T(x) = x - \nabla\phi(x) = \nabla\left(\frac{x^2}{2} - \phi(x)\right) = \nabla u(x)$$

Con $u(x)$ función convexa

Una demostración al Problema Dual

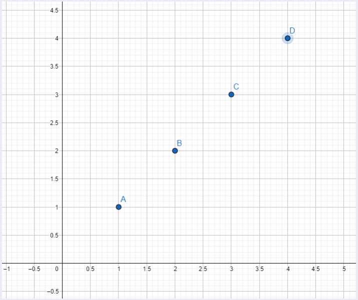
Conjuntos cíclicos monótonos

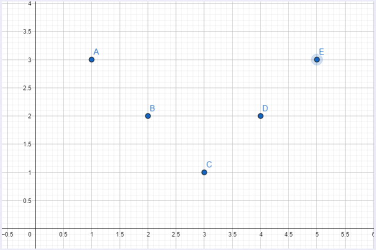
Un conjuntos $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es cíclico monótono si para cada $k \in \mathbb{N}$, cada permutación σ y cada familia finita de puntos (x_1, p_1), ..., $(x_k, p_k) \in A$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i \geq \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_{\sigma(i)}$$

Una demostración al Problema Dual

Conjuntos cíclicos monótonos





$$1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$2 + 6 + 12 + 4 = 24$$

$$3 + 4 + 3 + 8 + 15 = 33$$
$$2 + 2 + 6 + 12 + 15 = 37$$

Una demostración al Problema Dual

Conjuntos c-cíclicos monótonos

Sea $c : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$, decimos que un conjunto $\Gamma \subset X \times Y$ es c-cíclico monótono (c-CM) si para cada $k \in \mathbb{N}$, cada permutación σ y cada familia finita de puntos (x_1, y_1), ..., $(x_k, y_k) \in \Gamma$ satisface:

$$\sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{\sigma(i)})$$

Una demostración al Problema Dual

Teorema

Si $\emptyset \neq \Gamma \subset X \times Y$ es un conjunto c-CM y $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ entonces existe una función c-cóncava $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\Gamma \subset \{(x, y) \in X \times Y : \phi(x) + \phi^c(y) = c(x, y)\}$$

Una demostración al Problema Dual

Teorema

Si $\emptyset \neq \Gamma \subset X \times Y$ es un conjunto c-CM y $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ entonces existe una función c-cóncava $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\Gamma \subset \{(x, y) \in X \times Y : \phi(x) + \phi^c(y) = c(x, y)\}$$

$$\phi(x) = inf\{c(x, y_n) - c(x_n, y_n) + c(x_n, y_{n-1}) - c(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0) : n \in \mathbb{N}, (x_i, y_i) \in \Gamma\}$$
$$-\psi(y) = inf\{-c(x_n, y) + c(x_n, y_{n-1}) - c(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0) : n \in \mathbb{N}, (x_i, y_i) \in \Gamma\}$$

Una demostración al Problema Dual

Teorema

Si γ es un plan de transporte óptimo para el costo c y c es continua, entonces el soporte de γ es un conjunto c-CM

Una demostración al Problema Dual

Teorema

Si γ es un plan de transporte óptimo para el costo c y c es continua, entonces el soporte de γ es un conjunto c-CM

Teorema

Supongamos que X, Y son espacios Polish, y que $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y acotada. Entonces el problema DP admite una solución de la forma ϕ, ϕ^c y tenemos que $max(DP) = min(KP)$